

RESUME: L'objectif de cette fiche est de décrire les processus mécaniques de transfert de charge entre fibre et matrice au sein d'un matériau composite. Au travers d'une description micro-mécanique simplifiée de la distribution des contraintes dans la fibre et à l'interface, le lien entre le transfert de charge et les propriétés mécaniques macroscopiques des composites à fibres discontinues est établi. Ces approches ont essentiellement pour but de faire comprendre le rôle de paramètres tels que la longueur des fibres, le taux de renforcement et la réponse mécanique de l'interface.

Connaissances requises: Notions élémentaires de mécanique des matériaux, [ordres de grandeur des propriétés mécaniques](#) des éléments constitutifs des composites à renfort fibreux.

SOMMAIRE

1.Modèle de Cox

1.1 Contraintes dans la fibre et à l'interface

1.2 Relation contrainte-déformation

2.Modèle de Kelly

2.1 Contraintes dans la fibre et à l'interface

2.2 Relation contrainte-déformation

3.Modèle mixte

4.Bibliographie

INTRODUCTION

Un composite ne peut remplir pleinement sa fonction mécanique que si les charges appliquées au matériau peuvent être transmises de la matrice à la fibre. Ce transfert de charge est bien entendu largement conditionné par la réponse mécanique de la zone de contact entre la fibre et la matrice, autrement dit de l'interface ou de l'interphase.

Il est possible de décrire les processus de transfert de charge par des modèles micromécaniques simplifiés considérant, par exemple, une [V.E.R.](#) constitué d'une fibre noyée dans un cylindre de matrice sur lequel est appliquée une contrainte de traction. L'écriture des équations d'équilibre élastique permet théoriquement de déterminer le profil de la contrainte de traction dans la fibre et celui du cisaillement à l'interface. A partir de ces données, il est possible d'évaluer la courbe contrainte-déformation du composite.

En fonction du comportement supposé de l'interface, différentes réponses peuvent être simulées. Dans cette fiche, deux modèles pionniers dans ce domaine, ceux de [Cox \(1952\)](#) et de [Kelly-Tyson \(1964\)](#), sont détaillés. Dans le modèle de Cox, la liaison entre fibre et matrice est supposée parfaite et le comportement mécanique de ces constituants élastiques.

Au contraire, le modèle de Kelly-Tyson a initialement été développé dans le contexte de matériaux à matrice métallique pour lesquels des mécanismes de plasticité sont activés au voisinage de

l'extrémité des fibres.

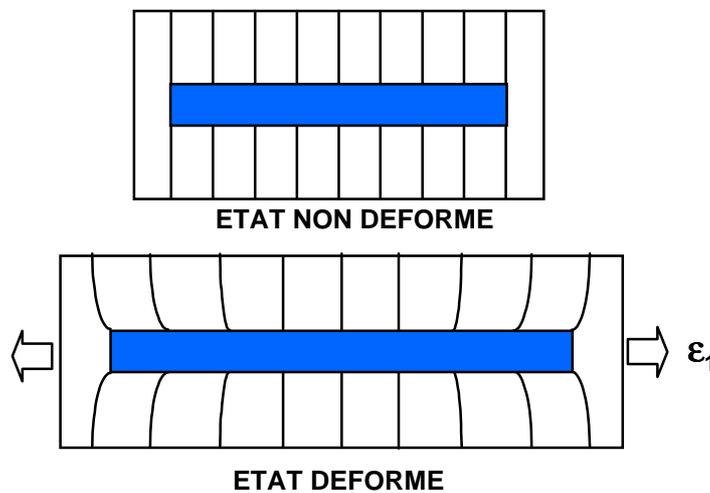
Un modèle applicable aux composites à matrices polymères et combinant les approches de Cox et de Kelly est succinctement présenté à la fin de la fiche.

1. Modèle de Cox; Transfert de charge élastique

L'applet

On considère le VER schématisé ci-dessous et constitué d'un fragment de fibre de rayon a enrobée dans un cylindre de matrice dont le rayon R est fixé par la fraction volumique de fibres V_f , et les hypothèses faites sur l'arrangement des fibres. Ce V.E.R. est soumis à ses extrémités à une déformation en traction ϵ_1 . Seule les composantes axiales des contraintes générées dans la fibre et la matrice sont considérées. Il s'agit donc d'une approche mono-dimensionnelle dans laquelle la contrainte axiale dans une section donnée de la fibre est en outre supposée uniforme.

La fibre et la matrice sont supposées parfaitement élastiques et la liaison fibre/matrice parfaite.



Volume Elémentaire Représentatif

1.1 Profils de contrainte dans la fibre et à l'interface

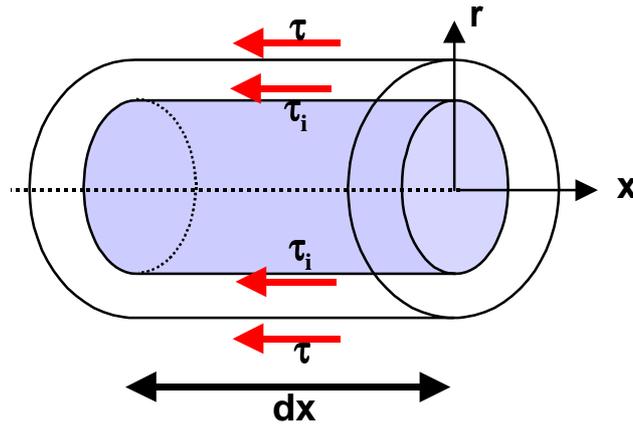
(i) Equilibre des forces de cisaillement

On écrit que les forces de cisaillement générées dans la matrice à une distance r de l'axe de la fibre ($r > a$) sont équilibrées par la force de cisaillement à l'interface ($r = a$) soit:

$$2\pi r \tau dx = 2\pi a \tau_i dx$$

où τ et τ_i sont respectivement la contrainte de cisaillement dans la matrice et la contrainte de cisaillement à l'interface. Soit :

$$\tau = \frac{a \tau_i}{r} \tag{1}$$



Equilibre élastique de la matrice en cisaillement

En faisant l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire de la matrice en cisaillement ($\tau = G_m \gamma$), on peut écrire:

$$\gamma = \frac{dw}{dr} = \frac{\tau}{G_m} = \frac{a\tau_i}{G_m r}$$

où w est le déplacement de la matrice selon la direction x et G_m son module de cisaillement. Par intégration, on obtient une expression de la contrainte interfaciale en fonction du déplacement de la matrice en $r = a$ (w_a) et $r = R$ (w_R):

$$\int_a^R dw = \frac{\tau_i a}{G_m} \int_a^R \frac{dr}{r}$$

$$w_R - w_a = \frac{\tau_i a}{G_m} \ln(R/a)$$

soit:

$$\tau_i = \frac{G_m (w_R - w_a)}{a \ln(R/a)}$$

(ii) Equilibre des contraintes dans une portion dx de fibre

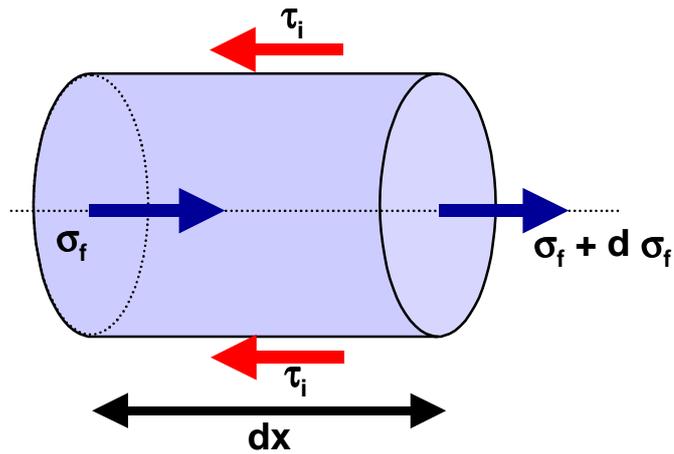
On écrit que la force de traction dans une portion dx de la fibre est équilibrée par la force de cisaillement à l'interface:

$$\pi a^2 d\sigma_f = -2\pi a \tau_i dx$$

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = -\frac{2\tau_i}{a} \tag{3}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\frac{d^2\sigma_f}{dx^2} = -\frac{2}{a} \frac{d\tau_i}{dx}$$



Equilibre élastique d'une portion de fibre

D'après (2) on obtient:

$$\frac{d\tau_i}{dx} = \frac{G_m}{a \ln(R/a)} \left(\frac{dw_R}{dx} - \frac{dw_a}{dx} \right)$$

- Pour $r = R$, on suppose que la déformation de la matrice est égale à la déformation appliquée ε_1 :

$$\frac{dw_R}{dx} = \varepsilon_m = \varepsilon_1$$

- Pour $r = a$, la déformation de la matrice est égale à celle de la fibre (liaison fibre/matrice parfaite) soit:

$$\frac{dw_a}{dx} = \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f}$$

Ce qui permet de décrire l'équilibre élastique du système par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2\sigma_f}{dx^2} = \frac{n^2}{a^2} (\sigma_f - E_f \varepsilon_1) \quad (4)$$

avec:

$$n^2 = \frac{2G_m}{E_f \ln(R/a)}$$

En supposant la contrainte σ_f nulle aux extrémités de la fibre (en $x = -L$ et $x = L$), il est possible de résoudre (4). On obtient les solutions suivantes:

Contrainte axiale dans la fibre :

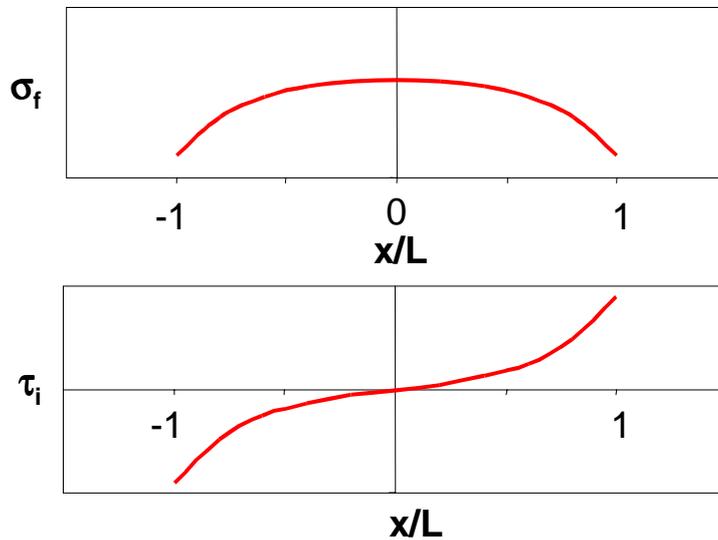
$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1 \left\{ 1 - \cosh(nx/r) / \cosh(ns) \right\} \quad (5)$$

Contrainte de cisaillement à l'interface :

$$\tau_i = \frac{1}{2} n E_f \varepsilon_1 \sinh(nx/r) / \cosh(ns) \quad (6)$$

où $s = L/a$ est le rapport d'aspect de la fibre.

Les profils de contrainte correspondant aux équations (5) et (6) sont représentés ci-dessous:



Modèle de Cox; Profils de contrainte dans la fibre (σ_f) et à l'interface (τ_i)

Sur ce schéma, on voit que le développement de contraintes de cisaillement aux extrémités de la fibre se traduit par une mise en charge progressive de celle-ci en traction. Les efforts sont donc bien transférés de la matrice vers la fibre.

1.2 Relation contrainte déformation :

Suivant l'approche introduite dans la [fiche 2](#), on considère que la contrainte moyenne dans le VER est égale à la somme des contraintes moyennes dans la fibre et la matrice pondérées par leurs proportions relatives :

$$\overline{\sigma}_1 = V_f \overline{\sigma}_f + V_m \overline{\sigma}_m \quad (7)$$

La contrainte moyenne dans la fibre est donnée par intégration de l'équation (5):

$$\overline{\sigma}_f = \frac{E_f \varepsilon_1}{L} \int_0^L \left\{ 1 - \cosh(nx/r) / \cosh(ns) \right\} dx$$

soit :

$$\overline{\sigma}_f = E_f \varepsilon_1 (1 - \tanh(ns) / ns)$$

Pour la matrice, on suppose que $\overline{\sigma}_m = E_m \varepsilon_1$

En substituant les expressions de $\overline{\sigma}_m$ et $\overline{\sigma}_f$ dans l'équation (7), on obtient finalement :

$$\sigma_1 = \{V_f E_f (1 - \tanh(ns) / ns) + V_m E_m\} \varepsilon_1 \quad (8)$$

Dans l'équation (8), la contrainte est directement proportionnelle à la déformation et la courbe contrainte/déformation du composite est donc une droite. Pour de longues fibres ($s \rightarrow \infty$), $\tanh(ns)$ est voisin de 1 et on retrouve la loi des mélanges correspondant au système parallèle:

$$E = v_f E_f + v_m E_m$$

2. Modèle de Kelly-Tyson

L'applet

Le modèle de Cox montre que le transfert de charge conduit au développement de contraintes interfaciales de cisaillement dont l'amplitude est maximale aux extrémités de la fibre. Dans la réalité, ces concentrations de contraintes sont limitées par le seuil de plasticité de la matrice ou la mise en glissement de l'interface. Par ailleurs, l'approche élastique n'est plus valable dès lors que la contrainte de traction dans la matrice excède sa limite d'élasticité. Ces phénomènes ont été mis initialement en évidence par Kelly et ses collaborateurs dans le cas de composites à matrice de cuivre renforcés par des fibres de Tungstène et de Molybdène. La très faible limite d'élasticité de la matrice se traduit alors, sous chargement de traction, par le développement précoce et progressif d'une zone de déformation plastique à partir des extrémités de la fibre.

2.1 Profils de contrainte dans la fibre et à l'interface

Afin de décrire ces processus, Kelly *et al* ont considérés que la contrainte interfaciale était constante aux extrémités de la fibre, dans la zone plastique. L'écriture de l'équilibre élastique de la fibre dans cette portion de fibre donne :

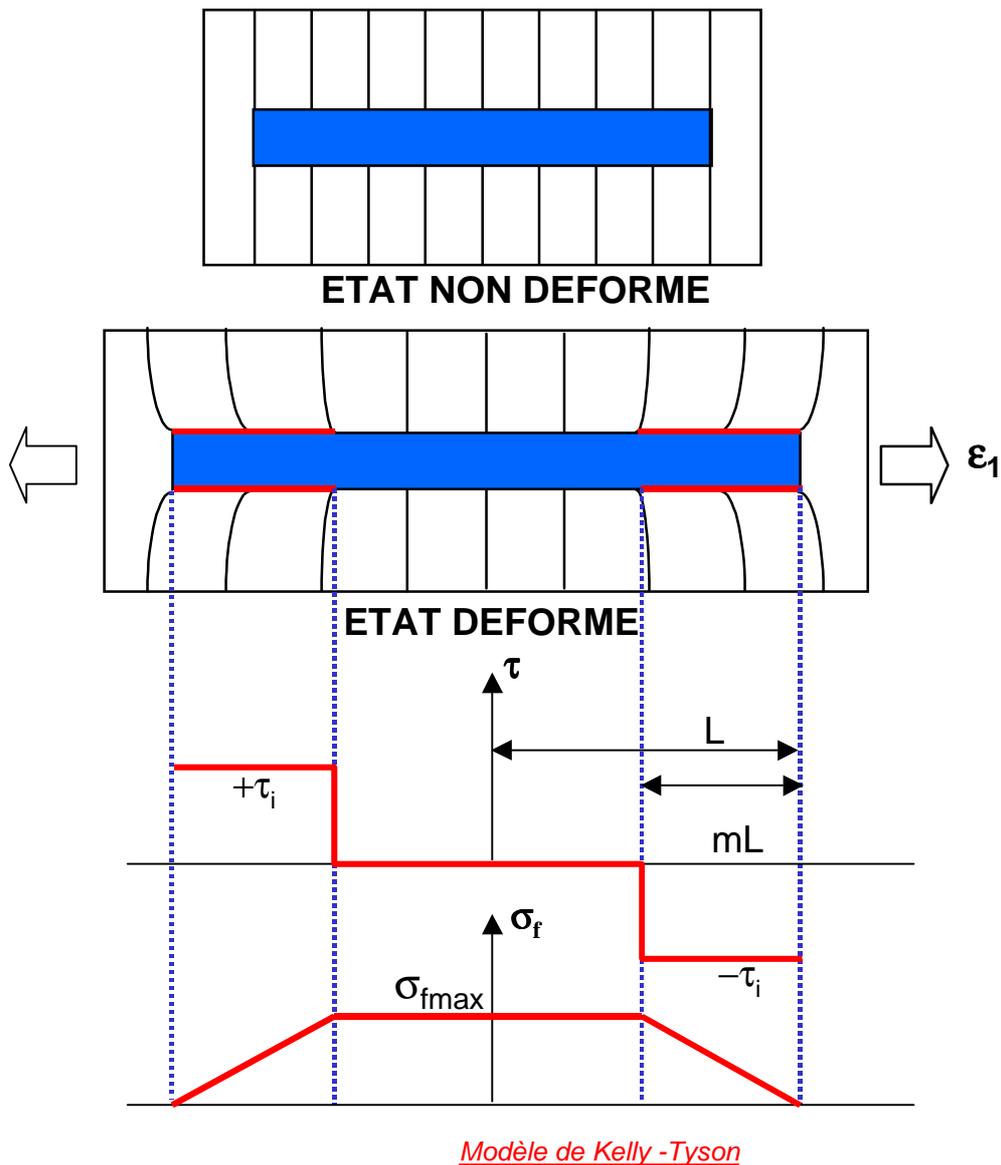
$$\sigma_f = \frac{2\tau_i}{a} (L - x)$$

Cette relation s'applique également au cas où le mécanisme physique mis en jeu aux extrémités de la fibre correspond à un frottement à contrainte constante. En ce sens, l'utilisation du modèle de Kelly peut être étendue aux composites à matrice élastique dans lesquels le renforcement s'effectue par glissement à l'interface.

La déformation dans la fibre ne peut excéder la déformation du composite, ce qui signifie que la contrainte σ_f augmente linéairement (cf équation précédente) à partir de l'extrémité de la fibre, jusqu'à la valeur $E_f \varepsilon_1$ si la fibre est suffisamment longue. Cette dernière condition correspond au critère suivant :

$$L_i \geq \frac{a E_f \varepsilon_1}{2\tau_i} \quad (9)$$

où L_i est une longueur dite *ineffective* correspondant à la portion de fibre dans laquelle la contrainte de traction n'a pas encore atteint sa valeur maximale $\sigma_{fmax} = E_f \varepsilon_1$.



Il est important de noter que ce modèle prend seulement en compte le transfert de charge se produisant dans la zone plastique située aux extrémités de la fibre. Les effets de transfert de charge élastiques dans la portion centrale de la fibre sont par contre totalement négligés ($\tau_i = 0$). Cette approche n'est valable que si le seuil de plasticité de la matrice (où le seuil de glissement à l'interface) est très bas. Dans ce cas, la déformation plastique (où le glissement) intervient dès le début de la mise en charge, sans phase de mise en charge élastique préalable.

2.2 Relation contrainte déformation

De la même façon que pour le modèle de Cox, la relation contrainte/déformation du composite peut être déduite du calcul de la contrainte moyenne dans le VER :

$$\overline{\sigma_1} = V_f \overline{\sigma_f} + V_m \overline{\sigma_m}$$

Différentes situations peuvent être considérées selon la limite d'élasticité de la matrice et la valeur du paramètre m quantifiant la fraction de la longueur de la fibre en glissement.

Cas 1 : matrice élastique, $m < 1$

Tant que $m < 1$, La contrainte moyenne dans la fibre est donnée par :

$$\overline{\sigma_f} = \sigma_{f \max} (1 - m/2)$$

soit

$$\overline{\sigma_1} = v_f \sigma_{f \max} (1 - m/2) + v_m \overline{\sigma_m}$$

Dans la portion centrale du V.E.R., la déformation de la fibre et de la matrice sont identiques et égales à la déformation ϵ_1 du composite :

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_{f \max}}{E_f}$$

$$\overline{\sigma_m} = E_m \epsilon_1$$

En considérant que $\sigma_{f \max} = 2m s \tau_i$, la relation contrainte déformation du composite peut s'écrire:

$$\overline{\sigma_1} = (v_f E_f + v_m E_m) \epsilon_1 - \frac{v_f E_f^2 \epsilon_1^2}{4 \tau_i s} \quad (10)$$

Cas 2: matrice élastique, $m=1$

La relation ci-dessus n'est valable que tant que $m \leq 1$, c'est à dire en dessous d'une valeur limite ϵ_{1p} de la déformation. Cette dernière peut être calculée en considérant que $\sigma_{f \max} = 2s \tau_i$:

$$\epsilon_{1p} = \frac{2s \tau_i}{E_f}$$

Lorsque $m = 1$, il se produit une saturation du transfert de charge dans la fibre et c'est la matrice qui encaisse le surcroît de contrainte appliquée. Dans ce cas $\overline{\sigma_f} = \sigma_{f \max} / 2$, et la relation contrainte déformation devient :

$$\overline{\sigma_1} = v_f s \tau_i + v_m E_m \epsilon_1 \quad (11)$$

Cas 3 : matrice plastique, $m < 1$

Dans le cas de composites à matrices métalliques, la limite d'élasticité de la matrice, σ_{mp} , est souvent atteinte avant la rupture des fibres. Le transfert de charge s'effectue par déformation plastique à l'interface pour une contrainte τ_p voisine de $\sigma_{mp}/2$. Tant que $\epsilon_1 < \epsilon_{mp}$, la courbe contrainte déformation suit encore la relation (10). Au delà, la matrice se plastifie et la contrainte moyenne dans la matrice est alors donnée par σ_{mp} plutôt que par $E_m \epsilon_1$. On a alors :

$$\overline{\sigma_1} = v_f E_f \epsilon_1 \left(1 - \frac{E_f \epsilon_1}{2 \sigma_{mp} s} \right) + v_m \sigma_{mp} \quad (12)$$

Cas 4 : matrice plastique , m=1

On remplace tout simplement $E_m \varepsilon_1$ par σ_{mp} dans l'expression (11).

3. Modèle Mixte

L'applet'

Dans le modèle de Kelly, les effets de transfert de charge élastique sont totalement négligés, ce qui revient à considérer que la déformation plastique de la matrice, ou la mise en glissement de l'interface, interviennent à des déformations appliquées très faibles. Dans la réalité, ces processus se produisent souvent après une phase de chargement élastique préalable qu'il convient de prendre en compte.

Dans le cas des composites à matrice polymère, la mise en glissement de l'interface se produit pour une valeur limite de la contrainte de cisaillement interfaciale, τ_d , qui correspond physiquement à la décohésion fibre/matrice. Dans la zone de fibre décollée, les processus de glissement dépendent de la valeur du coefficient de frottement fibre/matrice et des contraintes radiales appliquées sur la fibre. Dans une telle situation, la valeur correspondante du cisaillement interfaciale, τ_g , est très souvent inférieure à la valeur de la contrainte de décohésion τ_d .

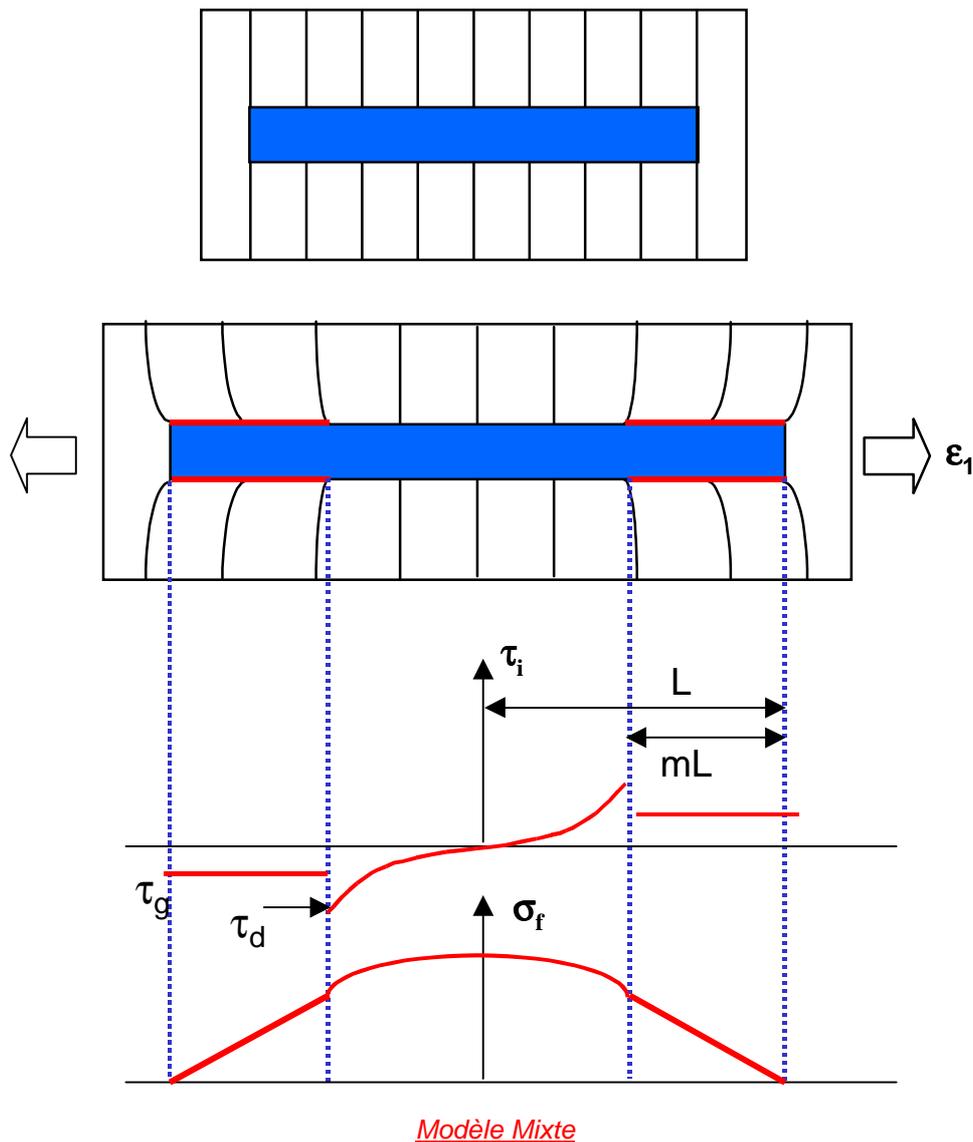
Afin de rendre compte de ces processus, on peut alors considérer un VER dans lequel :

- La portion centrale de la fibre est soumise à un chargement élastique, la valeur du cisaillement interfacial étant limitée par la contrainte à décohésion τ_d . Dans cette zone, on écrit exactement les mêmes équations d'équilibre élastique que celles introduites dans le modèle de Cox.
- Dès lors que $\tau_i > \tau_d$, on considère que se produit un glissement à contrainte constante τ_g . Le transfert de charge dans cette zone s'effectue selon les hypothèses du modèle de Kelly.

La résolution des équations d'équilibre avec les conditions aux limites appropriées permet de calculer la relation contrainte/déformation suivante:

$$\sigma_1 = \{V_f E_f + V_m E_m\} \varepsilon_1 - \frac{V_f}{s} \left\{ \frac{(E_f \varepsilon_1)^2 - (2\tau_d/n)^2}{4\tau_g} + \frac{2\tau_d}{n^2} \right\} \quad (13)$$

Pour les faibles valeurs de σ , le deuxième terme du second membre de l'équation (13) induit une non linéarité dans la relation contrainte-déformation.



Pour en savoir plus

Bibliographie

- Cox H.L., 'The elasticity and strength of paper and other fibrous materials', *British Journal of Applied Physics*, **3**, N°1 (1952) 72-79
- Kelly, A., Tyson, W.R., 'Fiber strengthened materials', in *High Strength Materials*, V.F. Zackay Ed., J. Wiley & Sons, London (1964) 578-602
- Piggott, M., *Load Bearing fibre composites*, Pergamon Press,

[AntoineChateauminois](#) - Mai 2000

Merci de me faire part de vos commentaires éventuels à l'adresse suivante :

antoine.chateauminois@espci.fr